ASTROİSTATİSTİK

13. KONU

Hazırlayan: Doç. Dr. Tolgahan KILIÇOĞLU

13. REGRESYON

Bir önceki konu olan Korelasyon bölümünde iki değişken arasındaki muhtemel bir ilişkinin olup olmadığının nasıl tespit edilebileceğini görmüştük. Peki iki değişken arasında bir ilişkinin olması bize ne gibi fayda sağlar? Bunu iki yönlü düşünebiliriz;

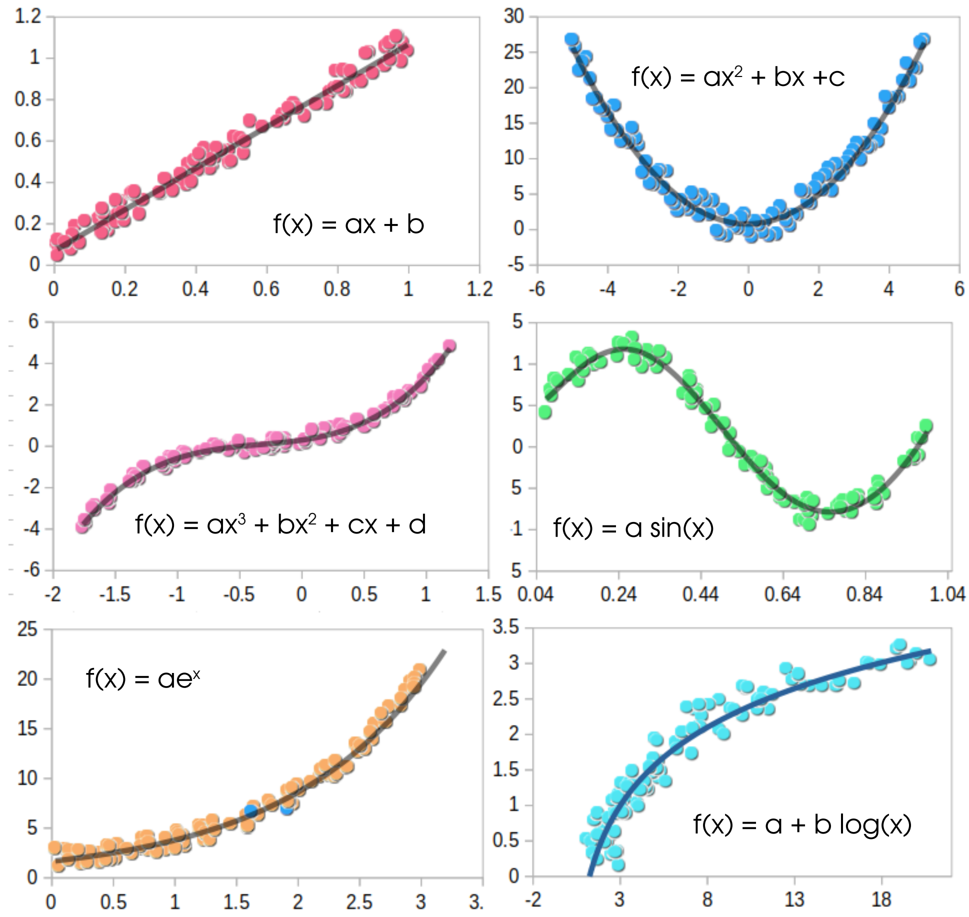
i. Birbirleri arasında ilişki olduğu tespit edilen değişkenler için bu ilişkinin neden kaynaklandığı ortaya konulabilirse bilimsel bir sürecin aydınlatılması sağlanabilir. Öyle ki, bilimsel çalışmalarda çeşitli değişkenlerin aralarındaki ilişkilerden sayısız bilgi elde edilmektedir. Örneğin evrenin genişlemesi, 1929'da Edwin Hubble'ın galaksilerin dikine hızları ile uzaklıkları arasında bir korelasyon olması sayesinde keşfedilebilmiştir.

ii. Birbirleri arasında ilişki olduğu tespit edilen değişkenlerden bazen bir tanesinin elde edilmesi zor olabilir. Şimdi, iki değişkenimizin olduğunu ve zor elde edilen değişkenin ikinci değişken olduğunu varsayalım. Eğer birinci değişken ile ikinci değişken arasındaki ilişki iyi şekilde biliniyorsa birinci değişkenin değerinin ölçülmesiyle ikinci değişkenin değeri elde edilebilir veya kestirilebilir. Örneğin, çift yıldızlar dışındaki yıldızların kütlelerinin ölçülmesi çok zordur. Çift yıldızların kütleleri ile ışıtma güçleri arasında sıkı bir ilişki olduğu ortaya konmuştur. Bu ilişki için türetilen bağıntı kullanılarak kütleleri doğrudan hesaplanamayan tek yıldızların ışıtma güçleri kullanılarak kütleleri kestirilebilmektedir.

Bu bölümde yukarıda ikinci maddede sözünü ettiğimiz kestirimin nasıl yapılabildiğine ilişkin temel yöntemleri öğreneceğiz. Bir başka deyişle, aralarında korelasyon olduğu bilinen değişkenlerin bir bölümünü biliyorsak bilinmeyeni nasıl kestirebileceğimizi göreceğiz. Değişkenler arasında bir ilişki olduğu biliniyorsa bu ilişkinin matematiksel ifadesinin tahmin edilmesine **regresyon analizi** adı verilir.

13.1 Denklemi Tahmin Edin

Aralarında bir ilişki olduğu düşünülen değişkenleri birbirine bağlayan matematiksel bir ifade elde etmek için öncelikle bu değişkenler arasındaki matematiksel ifadenin yapısının nasıl olduğunun tahmin edilmesi gerekir. Şekil 13.1'de aralarındaki bağıntıların çeşitli matematiksel fonksiyonlarla ifade edilebildiği değişkenlerin saçılma grafikleri gösterilmektedir.



Şekil 13.1 Çeşitli matematik fonksiyonları ile verilerin temsil edilmesi

13.2 Normal Denklemler ve En Küçük Kareler Yöntemi

Denklem tahmin edildikten sonra **normal denklemler** adı verilen bir dizi denklemin oluşturulması ve hesaplanması gerekir. Normal denklemlerin oluşturulması ve hesaplanması oldukça kolay olup sadece bazı kuralları bilmek gerekir.

Normal denklemler oluşturulurken;
i. Öncelikle tahmin edilen denklemde kaç tane bilinmeyen sabit olduğu belirlenir. Normal denklemlerin sayısı bilinmeyen sabitlerin sayısına eşit olacaktır. Örneğin, y=ax+b denkleminde (x ve y değişkenler olmak üzere) iki tane bilinmeyen sabit vardır: a ve b.

ii. Denklemin her iki tarafı da birinci sabitin katsayısı ile çarpılır. Daha sonra ortaya çıkan denklemde değişken içeren ifadelerin başına toplam işareti getirilir. Örneğin, y=ax+b denklemi için $\Sigma(yx)=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(x)$ olur (2 taraf da a'nın katsayısı olan x ile çarpılmış ve değişken içeren ifadelerin başına Σ getirilmiştir). Böylelikle birinci normal denklemi oluşturulumuş olur. Burada Σ sembolü daha önce alışık olduğumuz toplam sembolü olup parantez içinde kalan ifadenin değerlerinin i=1'den n'e (veri sayısına) kadar toplamını ifade eder.

iii. Şimdi denklemin her iki tarafı ikinci sabitin (eğer mevcutsa) katsayısı ile çarpılır ve yine benzer şekilde oluşan denklemde değişken içeren ifadelerin başına toplam işareti getirilir.

Örneğin, $y=ax+b$ denkleminde ikinci sabit b dir ve bu sabitin katsayısı 1 dir. Bu durumda diğer normal denklemi $\Sigma(y)=a\Sigma(x)+b\Sigma(1)$ olur. Burada $\Sigma(1)$ ifadesi n kez 1'in toplanması anlamına geldiğinden $\Sigma(1)=n$ olur. Böylece normal denklemi $\Sigma(y)=a\Sigma(x)+bn$ şeklinde yazılabilir.

iv. Eğer denklemde başka sabitler de varsa ii. veya iii. adımda yapılan işlemler her sabit için tekrar edilir. Örnek olarak verdiğimiz $y=ax+b$ denkleminde başka sabit kalmamıştır.

v. Σ işareti olan ifadeler hesaplanarak elde edilen sayılar denklemlerde yerine yazılır. Böylece bilinmeyen sabit sayısı kadar denklem elde edilmiş olunacaktır. Örneğin, $y=ax+b$ ifadesi için artık elimizde iki bilinmeyenli iki denklem vardır.

vi. Bundan sonra bu denklem takımları istenilen bir yöntemle çözülerek a ve b katsayıları tespit edilir. Bu katsayılar, örneğin, $y=ax+b$ denkleminde yerine konularak iki değişken arasındaki tahmin edilen matematiksel bağıntı elde edilmiş olur.

Şimdi farklı dört türden denklem ele alalım ve bunların normal denklemlerini oluşturalım.

13.2.1 Doğrusal denklemler (y=ax+b gibi)

Denklem:
$y=ax+b$ (değişkenler: y ve x | sabitler: a ve b)

Normal Denklemler:
$\Sigma(yx)=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(x)$
$\Sigma(y)=a\Sigma(x)+bn$

13.2.2 Çok değişkenli denklemler (t=ax+by+cz gibi)

Denklem:
$t=ax+by+cz$ (değişkenler: t, x, y ve z | sabitler: a, b ve c)

Normal Denklemler:
$\Sigma(tx)=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(yx)+c\Sigma(zx)$
$\Sigma(ty)=a\Sigma(xy)+b\Sigma(y^2)+c\Sigma(zy)$
$\Sigma(tz)=a\Sigma(xz)+b\Sigma(yz)+c\Sigma(z^2)$

13.2.3 Polinomlar ($y=a+bx+cx^2+...$)

Denklem:
$y=a+bx+cx^2$ (değişkenler: y ve x | sabitler: a, b ve c)

Normal Denklemler:
$\Sigma(y)=an+b\Sigma(x)+c\Sigma(x^2)$
$\Sigma(yx)=a\Sigma(x)+b\Sigma(x^2)+c\Sigma(x^3)$
$\Sigma(yx^2)=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(x^3)+c\Sigma(x^4)$

13.3 Normal Denklemlerin Çözümü için Determinant Yöntemi

Eğer normal denklemlerin sayısı ikiden fazlaysa sıradan denklem çözüm yöntemleri sabitlerin hesaplanması için uzun zaman alabilir. Bu nedenle burada denklemlerin çözümlerinde kullanılabilecek kısmen daha pratik bir determinant yönteminden söz etmek uygun olacaktır. Bu yöntemi bir örnek üzerinde göstererek anlatalım. Diyelim ki tahmini bağıntının $y=a+bx+cx^2$ şeklinde bir polinom olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda normal denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
&\Sigma(y)=an+b\Sigma(x)+c\Sigma(x^2)\\
&\Sigma(yx)=a\Sigma(x)+b\Sigma(x^2)+c\Sigma(x^3)\\
&\Sigma(yx^2)=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(x^3)+c\Sigma(x^4)
\end{aligned}$$

Bu denklemler için aşağıdaki determinantlar tanımlanır:

i. İlk determinant (D) denklemin sağ tarafında sabitlerin yanında yer alan değişken toplamlarını içerir:

$$D=\begin{vmatrix} n & \Sigma(x) & \Sigma(x^2)\\ \Sigma(x) & \Sigma(x^2) & \Sigma(x^3)\\ \Sigma(x^2) & \Sigma(x^3) & \Sigma(x^4)\end{vmatrix}$$

ii. İkinci determinantta (D_a) ilk sabit (a) nın yanındaki değişken toplamları yerine denklemin sol tarafındaki değişken toplamları yazılır:

$$D_a=\begin{vmatrix} \Sigma(x) & \Sigma(x) & \Sigma(x^2)\\ \Sigma(yx) & \Sigma(x^2) & \Sigma(x^3)\\ \Sigma(yx^2) & \Sigma(x^3) & \Sigma(x^4)\end{vmatrix}$$

iii. Üçüncü determinantta (D_b) ikinci sabit (b) nin yanındaki değişken toplamları yerine denklemin sol tarafındaki değişken toplamları yazılır:

$$D_b=\begin{vmatrix} n & \Sigma(y) & \Sigma(x^2)\\ \Sigma(x) & \Sigma(yx) & \Sigma(x^3)\\ \Sigma(x^2) & \Sigma(yx^2) & \Sigma(x^4)\end{vmatrix}$$

iv. Dördüncü determinantta (D_c) da benzer şekilde üçüncü sabit (c) nin yanındaki değişken toplamları yerine denklemin sol tarafındaki değişken toplamları yazılır:

$$D_c=\begin{vmatrix} n & \Sigma(x) & \Sigma(y)\\ \Sigma(x) & \Sigma(x^2) & \Sigma(yx)\\ \Sigma(x^2) & \Sigma(x^3) & \Sigma(yx^2)\end{vmatrix}$$

Yukarıdaki determinantlar hesaplandığında denklemdeki sabitler;

$$a = \frac{D_a}{D}$$

$$b = \frac{D_b}{D}$$

$$c = \frac{D_c}{D}$$

olacaktır.

13.4 Örnek Bir Regresyon Hesabı: Hubble Sabiti

Çizelge 13.1'de bazı galaksilerin uzaklıkları ile dikine hızları verilmektedir.

Çizelge 13.1 Seçilmiş bazı galaksilerin uzaklıkları ve dikine hızları

Kaynak: https://cmateu.github.io/Cecilia_Mateu_WebPage/PUA_files/ProjectE_HubbleLaw.pdf

Galaksi	**Uzaklık (d)** (Mpc)	**Dikine Hız (v_r)** (km s^{-1})
UGC 858	36	2375
UGC 1633	52	4247
UGC 3834	29	2033
UGC 7122	32	1813
UGC 7393	63	4203
UGC 7412	14	1140
UGC 9358	25	1903
UGC 11218	19	1484

Hubble kanunu $v_r = H_0 \cdot d$ aşağıdaki şekilde ifade edilir. Buna göre, Çizelge 13.1'deki veriyi kullanarak Hubble sabiti H_0 ı hesaplayalım.

Denklem:

$v_r = H_0 \cdot d$ (değişkenler: v_r ve d | sabitler: H_0)

Normal Denklem(ler):

$$\sum v_r \cdot d = H_0 \cdot \sum d^2$$

Sadece tek bir bilinmeyen sabit olduğundan normal denklem 1 tanedir. Şimdi, toplam işlemlerini yapalım;

$$\sum v_r \cdot d = (36 \cdot 2375) + (52 \cdot 4247) + (29 \cdot 2033) + (32 \cdot 1813) + (63 \cdot 4203) + (14 \cdot 1140) + (25 \cdot 1903) + (19 \cdot 1484)$$

$$\sum v_r \cdot d = 779837$$

ve

$$\sum d^2 = 36^2 + 52^2 + 29^2 + 32^2 + 63^2 + 14^2 + 25^2 + 19^2 = 11016$$

Bu iki değeri yerine yazarsak;

$$779837 = H_0 \cdot 11016$$

Buradan H_0 çekilirse;

$$H_0 = \frac{779837}{11016} = 70.8 \ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$$

olarak elde edilir.